

CHAPITRE 1

CALCUL DIFFÉRENTIEL

L'idée du calcul différentiel est d'approcher au voisinage d'un point une fonction f par une fonction plus simple (ou d'approcher localement le graphe de f par un espace plus simple).

Une fois les notations assimilées, les méthodes et les résultats du calcul différentiel sont naturels : ce sont les mêmes que pour l'étude des fonctions d'une variable réelle. On est ainsi amené

- à étudier la restriction des fonctions le long d'une droite comme, par exemple, pour démontrer les formules de Taylor.
- à généraliser les outils familiers en dimension 1 comme les changements de variables, l'inégalité des accroissements finis, etc.

Ce chapitre présente les résultats essentiels qui exploitent ces idées. Nous insistons sur leur mise en situation, en particulier en optimisation et pour l'étude des fonctions convexes. Nous nous appuyons régulièrement sur le livre de François Rouvière [ROU] qui est une excellente référence sur le sujet.

PRÉLIMINAIRES

Les définitions et les résultats sont valides dans les espaces de Banach réels. Cependant, la dimension infinie amène des problèmes qui sont secondaires en calcul différentiel (la dépendance vis-à-vis de la norme et la non-continuité automatique des applications linéaires). On a alors besoin de résultats sur les espaces de Banach comme par exemple le théorème de l'inverse continue de Banach (voir [BRÉ, II.6]). Comme la plupart des illustrations et des exemples que nous proposons ont pour cadre la dimension finie, nous avons choisi de ne pas nous attarder sur ces questions.

Dans cette section, E, F et G désignent des \mathbb{R} -espaces vectoriels normés. Sauf mention explicite du contraire, ils sont supposés de dimension finie. La norme est notée $\|\cdot\|$ indépendamment de l'espace.

1.1 DIFFÉRENTIABILITÉ

Les applications différentiables en un point a sont celles qui peuvent être approchées au voisinage de a par une application affine. Intuitivement, le graphe de f « ressemble » localement à un espace affine T_a .

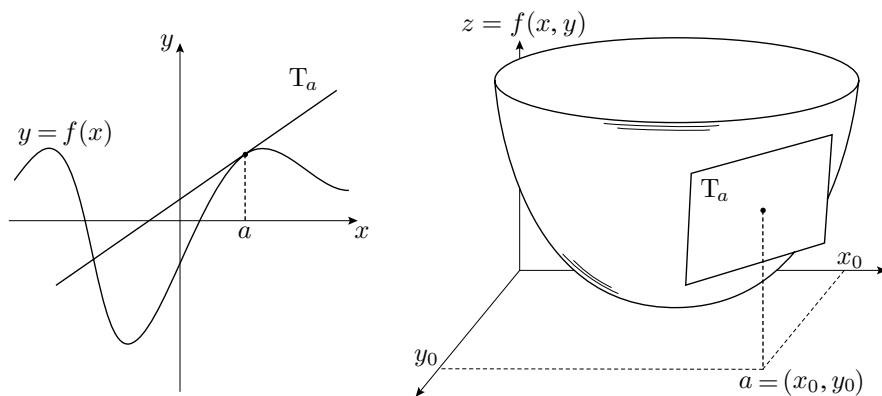


Fig. 1.1 Différentiabilité d'une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et d'une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

1.1.1 APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES

DIFFÉRENTIABILITÉ

Soient \mathcal{U} un ouvert de E et $f: \mathcal{U} \rightarrow F$. On dit que f est *différentiable* en $a \in \mathcal{U}$ s'il existe ℓ une application linéaire (continue) de E dans F telle que

$$f(a + h) = f(a) + \ell(h) + o(\|h\|),$$

quand h tend vers 0. Cette application ℓ est unique (voir [RDO3, 8.1.1.1°]) : on l'appelle la *différentielle* de f en a . On choisit de la noter $df(a)$ (d'autres notations courantes sont $f'(a)$ ou $Df(a)$). Insistons : $df(a)$ est une application linéaire (continue) de E dans F . On note souvent $df(a) \cdot h \in F$ sa valeur prise en $h \in E$.

Exemple 1.1 — Applications affines. Une application affine est la somme d'une application constante et d'une application linéaire.

Une application constante est différentiable partout et sa différentielle en tout point est l'application nulle. La réciproque est vraie si \mathcal{U} est connexe (voir l'application 1.14). Ainsi l'application différentielle d'une application constante est elle-même constante et, par suite, une fonction constante est de classe \mathcal{C}^∞ .

D'autre part, une application f linéaire (continue) est différentiable partout, et elle est sa propre différentielle en tout point :

$$\forall h \in E, \quad df(a) \cdot h = f(h).$$

L'application différentielle est ainsi l'application constante $df: x \mapsto f$. Une application linéaire (continue) est donc de classe \mathcal{C}^∞ . Bref, une application affine (continue) est de classe \mathcal{C}^∞ .

Exemple 1.2 — Différentielle d'un « produit ». Soit B une application bilinéaire (continue) d'un produit $E \times F$ dans G . Alors B est différentiable en $(a, b) \in E \times F$ et

$$\forall (h, k) \in E \times F, \quad dB(a, b) \cdot (h, k) = B(a, k) + B(h, b).$$

En particulier, on peut différentier le produit scalaire d'un espace euclidien (voir l'exemple 1.12).

Exemple 1.3 – Dans les espaces de matrices. L'analyse matricielle regorge d'exemples intéressants.

- Lors de la démonstration du lemme 1.31 de Morse, on s'intéresse à la différentielle de l'application $M \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^t M A_0 M \in \mathcal{S}_n$, où $A_0 \in \mathcal{S}_n$.
- Le calcul de la différentielle de l'inverse sur $GL_n(\mathbb{R})$ est fait directement dans l'exercice 16 de [ROU] ou via les dérivées partielles dans l'exercice 7 de [GOU2, p.309]. La première méthode présente l'avantage d'être valable en dimension infinie et a fait l'objet de la troisième partie du sujet d'analyse de 1999.
- la différentielle du déterminant $M \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto \det(M) \in \mathbb{R}$ est un autre exemple classique. (voir l'exercice 25 de [ROU] ou l'exercice 7 de [GOU2, p.309] ainsi qu'une application à l'exercice 1.5).

Exemple 1.4 – Sandwich. Soient $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in E$.

Considérons deux applications

$$m: E \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad M: E \rightarrow \mathbb{R}$$

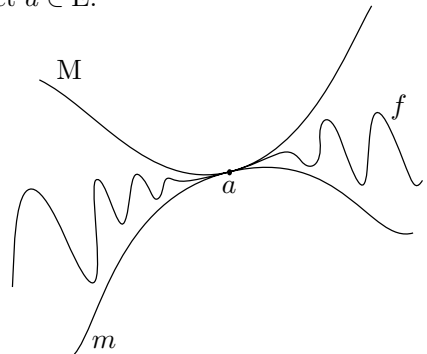
différentiables en a avec la même différentielle
 $dm(a) = dM(a)$ en a et vérifiant

$$m(a) = f(a) = M(a)$$

et

$$m(y) \leq f(y) \leq M(y)$$

pour y proche de a . Alors f est différentiable en a , avec $df(a) = dm(a) = dM(a)$.



Ce résultat exprime simplement ce qui est évident sur un dessin : une courbe prise « en sandwich » entre deux courbes ayant la même tangente admet cette même tangente. Démontrons ce résultat. Posons $\ell = dm(a) = dM(a)$ et écrivons, pour tout h suffisamment petit,

$$m(a+h) \leq f(a+h) \leq M(a+h).$$

D'où

$$m(a+h) - m(a) \leq f(a+h) - f(a) \leq M(a+h) - M(a)$$

c'est-à-dire

$$\ell(h) + o(h) \leq f(a+h) - f(a) \leq \ell(h) + o(h).$$

Finalement $f(a+h) - f(a) = \ell(h) + o(h)$, ce qui permet de conclure.

Remarque 1.5 – Identifications. Ajoutons que deux identifications sont utilisées en permanence en calcul différentiel : l'une concernant la différentielle seconde, l'autre les fonctions d'une variable réelle.

Soit $f: E \rightarrow F$ une application deux fois différentiable en a . Cette hypothèse impose à f d'être différentiable dans un voisinage de a . Pour tout x dans ce voisinage, $df(x)$ appartient à $\mathcal{L}(E, F)$, et donc la différentielle au point a de l'application $x \mapsto df(x)$ appartient à $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$. Cet espace est identifié avec l'espace $\mathcal{L}_2(E, F)$ des applications bilinéaires de E dans F grâce à l'isomorphisme

$$\begin{cases} \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F)) & \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_2(E, F) \\ u & \longmapsto ((h, k) \mapsto u(h)(k)). \end{cases}$$

qui est en fait une isométrie si l'on munit les espaces de leurs normes canoniques.

La deuxième identification précise pourquoi la différentiabilité est bien une extension de la dérivabilité. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow F$. La différentiabilité en a équivaut (par définition) à la dérivabilité en a , et la différentielle est $h \mapsto f'(a)h$. Ainsi, avec l'isomorphisme

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\mathbb{R}, F) \xrightarrow{\sim} F \\ u \mapsto u(1), \end{cases}$$

on identifie dérivée et différentielle. Notez que certains livres (comme [CIA]) parlent d'applications « dérivables » pour dire « différentiables », et de « dérivées » pour dire « différentielles ».

DÉRIVÉES DIRECTIONNELLES

Soit f une application d'un ouvert \mathcal{U} de E dans F . On dit que f est dérivable en $a \in \mathcal{U}$ selon $h \in E$ si la fonction partielle $t \mapsto f(a + th)$ est dérivable en 0. Sa dérivée est la *dérivée partielle* ou la *dérivée directionnelle* de f dans la direction h . On la note

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \quad \text{si } h = e_i \text{ et } (e_1, \dots, e_n) \text{ une base de } E.$$

Certains ouvrages utilisent d'autres notations, comme $\partial_h f(a)$ ou $D_h f(a)$.

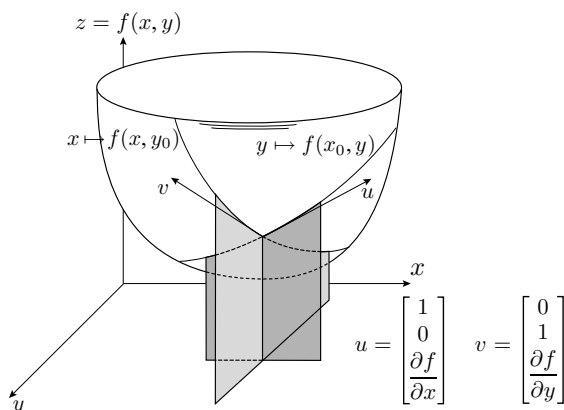


Fig. 1.2 Dérivées directionnelles d'une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

Si f est différentiable en $a \in \mathcal{U}$, alors les dérivées directionnelles en a existent et on a l'égalité

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = df(a) \cdot h.$$

La réciproque est fautive : l'existence des dérivées partielles dans toutes les directions n'implique pas la différentiabilité. C'est bien naturel puisque la connaissance du comportement des fonctions partielles (même dans toutes les directions) ne donne d'information sur le comportement de f que sur les droites issues de a . Or, dans la définition de la différentielle, h peut tendre vers 0 « en tournant autour ».

Contre-exemple 1.6 Soit l'application définie par $f(x, y) = y^2/x$ si $x \neq 0$ et $f(0, y) = y$ sinon. Elle est dérivable en $(0, 0)$ dans toute direction, mais elle n'est même pas continue. Cet exemple est proposé dans [RDO3, 8.1.1.5°] et corrigé à l'exercice 1 de [GOU2, p.305]. L'idée géométrique est d'approcher $(0, 0)$ en tournant (le long de la parabole $x = y^2$). On a $f(y^2, y) = 1$ et donc $f(y^2, y)$ ne tend pas $f(0, 0) = 0$ quand y tend vers 0. Bref, f n'est pas continue en $(0, 0)$ donc pas différentiable en $(0, 0)$.

Remarque 1.7 – Affine VS vectoriel. En calcul différentiel, l'espace de travail possède une structure d'espace vectoriel et donc aussi une structure d'espace affine. Il n'est pas toujours désirable de distinguer vecteurs et points, mais il est bon de garder à l'esprit la cohabitation des deux en calcul différentiel. Par exemple, pour la dérivée directionnelle, on dérive une fonction en un point dans la direction d'un vecteur.

GRADIENT

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien (ou un espace de Hilbert) et $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable en $a \in E$. Par définition, $df(a)$ est une forme linéaire (continue) sur E . D'après le théorème 3.29, il existe un unique vecteur de E , noté $\nabla f(a)$, tel que

$$df(a) \cdot h = \langle \nabla f(a), h \rangle \quad \text{pour tout } h \in E.$$

On l'appelle *gradient* de f en a . Remarquez que le gradient dépend du produit scalaire choisi sur E .

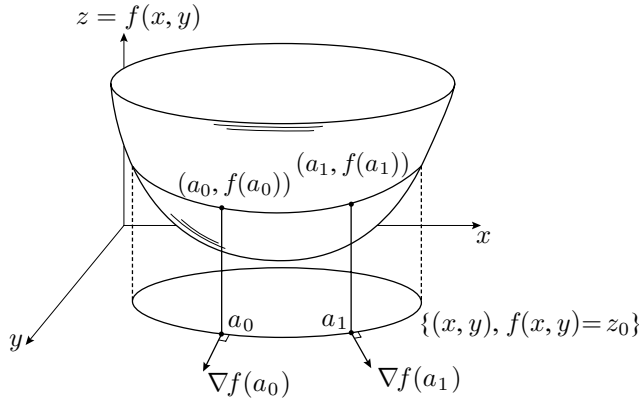


Fig. 1.3 Gradient d'une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

Si $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, il y a essentiellement deux méthodes pour calculer le gradient :

- en revenant à la définition,
- via les dérivées partielles

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

Attention, ce n'est pas parce que toutes les dérivées partielles existent que le vecteur des dérivées partielles est égal au gradient. En effet, le gradient n'est défini que pour des applications différentiables. De plus, cette notion ne concerne que les fonctions à valeurs dans \mathbb{R} .

Remarque 1.8 – Interprétation géométrique. Géométriquement, le gradient en a (supposé non nul) peut s'interpréter de trois manières.

- $\nabla f(a)$ indique la direction « de la plus forte pente » de f en a (voir [ROU, ex.27]).
- Le graphe de la fonction f est une hypersurface de $E \times \mathbb{R}$ dont l'espace tangent est l'orthogonal de $(\nabla f(a), -1)$.

– $\nabla f(a)$ dirige la normale à « l'hyperplan tangent » en a à « l'hypersurface »

$$S = \{x \in E, f(x) = f(a)\}.$$

Si l'on trace sur S une courbe dérivable γ qui passe par a en $t = 0$, son vecteur tangent $\gamma'(0)$ est orthogonal à $\nabla f(a)$ (pour le voir, dériver par rapport à t l'égalité $f \circ \gamma(t) = f(a)$).

Le cadre justifiant proprement tout ceci est celui des sous-variétés (auquel [ROU, Ch.5] est une bonne introduction).

1.1.2 LEMME FONDAMENTAL DE COMPOSITION

Le lemme technique suivant est extrêmement important : il généralise la formule de dérivation des fonctions composées et il est d'usage permanent.

Lemme 1.9 – Différentiabilité d'une composée. Soient \mathcal{U} un ouvert de E , \mathcal{V} un ouvert de F et a un point de \mathcal{U} tel que $f(a) \in \mathcal{V}$. Si $f: \mathcal{U} \rightarrow F$ et $g: \mathcal{V} \rightarrow G$ sont différentiables respectivement aux points a et $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable au point a et

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \cdot df(a).$$

Pour démontrer ce lemme, il suffit d'écrire le développement limité de $g \circ f$ en a au premier ordre (voir [ROU, Ch.2] pour le schéma de la preuve et [RDO3, 8.1.2] pour les détails).

L'identité d'Euler donne un exemple d'utilisation de ce lemme (voir [ROU, ex.20]). Par ailleurs, en appliquant ce lemme à une fonction bijective f et à son inverse, on obtient le résultat suivant.

Application 1.10 – Différentielle de la réciproque. Soit $f: \mathcal{U} \subset E \rightarrow F$ une bijection de \mathcal{U} sur $f(\mathcal{U})$. Si f est différentiable en un point $a \in \mathcal{U}$ et si f^{-1} est différentiable au point $f(a)$, alors $df(a)$ est un isomorphisme de E sur F et

$$d(f^{-1})(f(a)) = df(a)^{-1}.$$

Sous ces hypothèses, $df(a)$ réalise donc un isomorphisme entre E et F (qui sont ainsi de même dimension).

L'inconvénient de cet énoncé est qu'il exige que de f^{-1} soit différentiable en $f(a)$, ce qui est difficile à vérifier. Pour y remédier, on ajoute des propriétés à f (que f soit de classe \mathcal{C}^1 et de différentielle inversible en a) pour se passer de celles sur f^{-1} (que f soit différentiable en $f(a)$). Cela donne le premier théorème fondamental du calcul différentiel : le théorème d'inversion locale (voir la section suivante).

Ajoutons que si f est simplement un homéomorphisme, E et F sont aussi de même dimension, mais c'est plus difficile à prouver (sauf si $E = \mathbb{R}$ car on dispose alors d'un argument de connexité, voir l'exercice 7 de [GOU1, p.46]).

Exemple 1.11 – Restriction à un segment. Soit f différentiable sur un ouvert \mathcal{U} de E . Pour tous $a, b \in \mathcal{U}$ tels que le segment $[a, b]$ soit dans \mathcal{U} , l'application

$$\varphi: \begin{cases} [0, 1] \longrightarrow F \\ t \longmapsto f(a + t(b - a)) \end{cases}$$

est dérivable sur $[0, 1]$ et $\varphi'(t) = df(a + t(b - a)) \cdot (b - a)$ pour tout $t \in [0, 1]$. C'est une application directe du lemme de composition 1.9 que l'on retrouve très

souvent, comme par exemple dans la démonstration de l'inégalité des accroissements finis [RDO3, 8.1.3.1°] et celle des développements de Taylor [RDO3, 8.3].

Exemple 1.12 – Norme au carré. Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et g une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert \mathcal{U} de E . Posons $N: x \mapsto \|x\|^2$ et $G = N \circ g$. Alors G est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{U} et

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad \forall h \in E, \quad dG(x) \cdot h = 2\langle g(x), dg(x) \cdot h \rangle.$$

On démontre ceci en appliquant deux fois le lemme 1.9. Commençons par observer que N est la composée de l'application linéaire $i: x \mapsto (x, x)$ avec l'application bilinéaire $b: (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$. D'après les exemples 1.1 et 1.2, N est différentiable et

$$dN(x) \cdot h = db(i(x))(di(x) \cdot h) = db(x, x) \cdot (h, h) = \langle h, h \rangle + \langle h, x \rangle = \langle 2x, h \rangle.$$

On en déduit que G est différentiable et que

$$dG(x) \cdot h = dN(g(x)) \cdot (dg(x) \cdot h) = 2\langle g(x), dg(x) \cdot h \rangle.$$

On retrouve notamment une fonction de ce type au cours de la preuve du théorème d'Hadamard-Lévy proposée dans [ZQ, p.392]. Remarquez que cette preuve utilise une hypothèse supplémentaire de régularité justement pour pouvoir faire ce calcul.

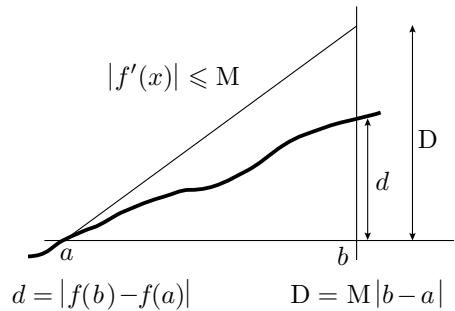
1.1.3 INÉGALITÉ DES ACCROISSEMENTS FINIS

L'inégalité des accroissements finis (parfois appelée inégalité de la moyenne) permet de majorer l'accroissement de f entre deux points avec un majorant de la norme de sa différentielle.

Théorème 1.13 – Inégalité des accroissements finis. Soient \mathcal{U} un ouvert de E et $f: \mathcal{U} \rightarrow F$ une application différentiable sur \mathcal{U} . Soit $[a, b]$ un segment contenu dans \mathcal{U} . S'il existe $M > 0$ tel que $\|df(x)\| \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$, alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M \|b - a\|.$$

Ce théorème généralise l'inégalité des accroissements finis pour une unique variable réelle (voir [RDO3, 4.2.1.1°]). D'ailleurs, l'inégalité en dimension supérieure se montre grâce à l'inégalité en une dimension via la fonction φ de l'exemple 1.11 (voir [RDO3, 8.1.3.1°]). Nous renvoyons aux intéressants commentaires de [ROU, chap.3].



Remarquons que si f est de classe \mathcal{C}^1 , l'existence du majorant M est assurée par la compacité du segment $[a, b]$ et la continuité de $x \mapsto df(x)$. Soulignons qu'il faut que \mathcal{U} soit convexe pour appliquer l'inégalité entre deux points quelconques de \mathcal{U} . Ajoutons aussi que la norme de $df(x)$ qui apparaît dans l'énoncé est la norme d'application linéaire associée aux normes de E et F :

$$\|df(x)\| = \sup_{h \neq 0} \frac{\|df(x) \cdot h\|_F}{\|h\|_E}.$$

Lorsque l'inégalité des accroissements finis est utilisée pour montrer que f est contractante, le choix des normes est primordial (voir [ROU, ex.32]).

Application 1.14 — Différentielle nulle. Soit \mathcal{U} un ouvert connexe de E ; alors

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad df(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ est constante sur } \mathcal{U}.$$

L'implication (\Leftarrow) est toujours vraie. L'hypothèse de connexité permet de démontrer (\Rightarrow) en exploitant l'équivalence suivante (voir [GOU2, I.4.3]) pour un ouvert \mathcal{U}

$$\mathcal{U} \text{ connexe} \Longleftrightarrow \mathcal{U} \text{ connexe par arc} \Longleftrightarrow \mathcal{U} \text{ connexe par lignes brisées.}$$

Ajoutons que si la différentielle est nulle mais \mathcal{U} n'est pas connexe, la fonction f est constante seulement sur chaque composante connexe de \mathcal{U} .

Application 1.15 — Caractérisation des fonctions \mathcal{C}^1 . Soient \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^n et $f: \mathcal{U} \rightarrow F$ une fonction dont les dérivées partielles existent en tout point de \mathcal{U} . On ne peut pas en déduire que f est différentiable sur \mathcal{U} (voir le contre-exemple 1.6). Mais dès lors que les dérivées partielles existent et sont continues, alors f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{U} , et donc notamment différentiable (voir [ROU, ex.37]). Comme la réciproque est vraie, c'est ainsi une caractérisation des fonctions \mathcal{C}^1 (utilisée constamment).

Application 1.16 — Théorème de Schwarz. Soit f une application d'un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^n dans F . Si f est deux fois différentiable au point $a \in \mathcal{U}$ alors, pour $1 \leq i, j \leq n$, on a

$$d^2f(a)(e_i)(e_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = d^2f(a)(e_j)(e_i).$$

Voir le théorème 6.1 dans [ROU]. Le théorème de Schwarz est parfois donné avec d'autres hypothèses (voir [GOU2, p.302] et l'exercice 1 de [GOU2, p.305]).

Ce théorème permet d'identifier la différentielle seconde $d^2f(a)$ avec une application bilinéaire symétrique sur E (via le premier isomorphisme de la remarque 1.5). En particulier, lorsque f est à valeurs réelles, $d^2f(a)$ est identifiée à une forme bilinéaire symétrique et donc aussi à une forme quadratique. La matrice représentant cette forme quadratique dans la base canonique est appelée la *hessienne* de f en a . On la note

$$Hf(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{i,j}.$$

Maintenant qu'on peut intervertir deux dérivées partielles, on peut faire de même pour toute permutation de plusieurs dérivées partielles (puisque les transpositions engendrent les permutations). Ainsi, l'ordre des dérivations partielles n'a pas d'influence. A priori, il y avait donc n^p dérivées partielles p -ièmes. On sait maintenant qu'il n'y en a en fait que C_{n-1+p}^p (voir l'exercice 4.1).

Application 1.17 — Différentielle d'une limite. Il existe un théorème en plusieurs variables analogue au théorème [RDO4, 2.2.3.1°] de la variable réelle. Sous des hypothèses de convergence uniforme, la différentielle de la limite est la limite des différentielles (voir [ROU, ex.38] pour un énoncé précis, une preuve et une application).

1.1.4 UTILISATIONS DE LA DIFFÉRENTIELLE

DIFFÉRENTIABILITÉ

La différentielle d'une fonction en un point approche cette fonction au premier ordre autour de ce point. En fait, une information sur la différentielle en un point permet d'obtenir des propriétés de la fonction elle-même au voisinage de ce point.

Cette idée centrale se retrouve notamment :

- dans le théorème d'inversion locale (voir la section 1.2),
- pour les conditions nécessaires du premier ordre vérifiées par les minima (voir la sous-section 1.3.2),
- lors de l'étude qualitative des équations différentielles : la stabilité d'un point critique peut se lire sur la différentielle (voir le théorème [ZQ, X.IV.4]).

Lorsque l'approximation au premier ordre ne suffit pas, on peut la préciser par les différentielles supérieures : ce sont les formules de Taylor, étudiées au paragraphe 1.4.

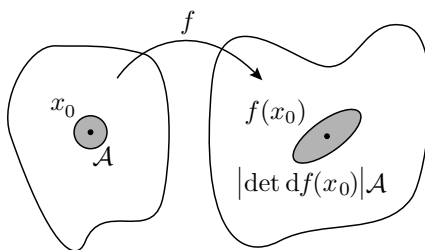
CHANGEMENT DE VARIABLES

Énonçons l'important théorème du changement de variables dans une intégrale.

Théorème 1.18 – Changement de variables. Soient \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^n et $\varphi: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application injective et différentiable sur \mathcal{U} . Alors $\mathcal{V} = \varphi(\mathcal{U})$ est mesurable et une fonction f appartient à $L^1(\mathcal{V})$ si, et seulement si, la fonction $|\det d\varphi| f \circ \varphi$ est dans $L^1(\mathcal{U})$. Dans ce cas,

$$\int_{\mathcal{V}} f(x) dx = \int_{\mathcal{U}} f(\varphi(y)) |\det d\varphi(y)| dy.$$

La preuve de ce théorème est basée sur le théorème 4.83. Une fois de plus, l'idée est d'approcher autour de chaque point y la transformation φ par sa différentielle $d\varphi(y)$. Ainsi localement, φ affecte le volume infinitésimal de la même manière que l'application linéaire $d\varphi(y)$: en le multipliant par $|\det d\varphi(y)|$. Attention à ne pas oublier le déterminant et la valeur absolue dans la formule de changement de variables.



Signalons aussi que le résultat est encore vrai sous des hypothèses plus faibles (voir [RUD, 7.26]). Nous l'énonçons ici sous une forme plus pratique, que l'on peut encore simplifier en supposant que φ est un difféomorphisme de \mathcal{U} sur \mathcal{V} .

On utilise très souvent des changements de variables pour calculer ou ré-exprimer des intégrales (voir par exemple l'exercice 1.4).

Application 1.19 – Calcul de loi. En probabilité, ce théorème permet de calculer la loi d'une variable aléatoire définie à partir d'autres variables aléatoires dont on connaît la loi (voir les exemples 8.3 et 8.4 ainsi que l'exercice 8.4 de [OUV]).

1.2 INVERSION LOCALE ET FONCTIONS IMPLICITES

Le théorème d'inversion locale établit qu'une fonction de classe \mathcal{C}^1 est localement un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme dès lors que son premier ordre l'est. Le théorème des fonctions implicites exprime qu'une courbe définie implicitement par une équation du type $f(x, y) = 0$ peut être vue localement comme le graphe d'une fonction.

Les deux théorèmes servent à créer des fonctions. Comme ce n'est pas facile en général, ces théorèmes apportent un véritable plus. Pensez-y quand vous voyez une question du genre « montrer qu'il existe f de classe \mathcal{C}^1 telle que... ».