Immersion, Submersion et base incomplète

www.h-k.fr/publications/objectif-agregation

Cette note propose une démonstration de la forme réduite d'une immersion et d'une submersion. Cette démonstration met en avant un théorème d'algèbre linéaire : le théorème de la base incomplète (voir [2, 9.2.2.2] et [1, théorème 4.4]). Les propositions 2 et 6 sont en quelque sorte les versions $\mathscr{C}^1$ de ce théorème d'algèbre linéaire. Nous remarquerons, en comparant le cas de la submersion et de l'immersion, que ces théorèmes sont en fait « duaux » l'un de l'autre (l'application du théorème de la base incomplète se fait dans un cas dans $\mathbb{R}^n$ et dans l'autre dans $(\mathbb{R}^n)^*$).

Submersion.

Définition 1 — Submersion. Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in \mathrm{U}$ et $f = (f_1, \dots, f_p) : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^p$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. On dit que f est une *submersion en a* si $\mathrm{d}f(a)$ est surjective.

La proposition 2 montre qu'il existe, à un difféomorphisme près à la source, une unique submersion : la surjection canonique de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

Proposition 2 — Forme réduite d'une submersion. Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in \mathrm{U}$ et une application $f = (f_1, \dots, f_p) : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que f est une submersion en a. Il existe un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme φ d'un voisinage ouvert de a dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $f \circ \varphi^{-1}$ soit l'application

$$g : (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_p)\,.$$

Preuve. Le **théorème du rang** (voir [1, 4.13]) et la surjectivité de $\mathrm{d}f(a)$ assurent l'inégalité $n \geqslant p$.

Par ailleurs, pour $i \in [\![1\,,\, p]\!]$, on note $\mathrm{d}f_i(a)$ la différentielle de f_i en a. La surjectivité de $\mathrm{d}f(a)$ est équivalente à la liberté de la famille $\mathrm{d}f_i(a)$. On peut donc, grâce au **théorème de la base incomplète**, considérer des formes linéaires $(\varphi_{p+1}, \dots, \varphi_n)$ telles que $(\mathrm{d}f_1(a), \dots, \mathrm{d}f_p(a), \varphi_{p+1}, \dots, \varphi_n)$ soit une base de $(\mathbb{R}^n)^*$.

On définit alors φ par

$$\forall\, v \in \mathrm{V}, \qquad \varphi(v) = (f_1(v), \dots, f_p(v), \varphi_{p+1}(v), \dots, \varphi_n(v)).$$

Comme les φ_i sont linéaires, φ est de classe $\mathscr{C}^1$ et on a $\mathrm{d}\varphi(a) = (\mathrm{d}f_1(a), \dots, \mathrm{d}f_p(a), \varphi_{p+1}, \dots, \varphi_n)$. L'application linéaire $\mathrm{d}\varphi(a)$ est donc bijective et le **théorème d'inversion locale** (voir [1, 1.2.1]) assure que φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme d'un voisinage ouvert de a dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Puisqu'on a bien sûr $f = g \circ \varphi$, la proposition est démontrée. ∎

Remarque 3 — Autres démonstrations. La démonstration proposée ci-dessus met en avant le rôle du théorème de la base incomplète (appliqué dans l'espace $(\mathbb{R}^n)^*$ des formes linéaires de $\mathbb{R}^n$). Il peut être intéressant de chercher dans les autres preuves (par exemple dans l'exercice 72 de [3]) où est caché le théorème de la base incomplète. Pour l'exercice 72 de [3], il est appliqué dans sa version forte : celle avec la famille libre $\mathscr{L}$ et la famille génératrice $\mathscr{G}$ contenant $\mathscr{L}$. ∎

Remarque 4 — Une autre formulation. Grâce à la définition suivante, la proposition 2 (ou une forme un tout petit peu plus faible) peut s'énoncer de façon très similaire à celui du théorème de la base incomplète.

Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathrm{V}$. Pour $i \in [\![1\,,\, n]\!]$, on considère $f_i : \mathrm{V} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. On dit que l'application $f = (f_1, \dots, f_n)$ est un système de coordonnées locales ou un changement de coordonnées locales en a, s'il existe un voisinage V' de a tel que f soit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme. Le théorème d'inversion locale assure que f est un système de coordonnées locales en a si et seulement si l'application linéaire $\mathrm{d}f(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est inversible.

Le proposition de forme réduite des submersions peut alors s'énoncer : si $(f_1, \dots, f_p)$ est une submersion en a, on peut compléter la famille $(f_1, \dots, f_p)$ en un système de coordonnées locales $(f_1, \dots, f_n)$ en a. ∎

Immersion.

Définition 5 — Immersion. Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in \mathrm{U}$ et $f = (f_1, \dots, f_p) : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^p$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. On dit que f est une *immersion en a* si $\mathrm{d}f(a)$ est injective.

La proposition 6 montre qu'il existe, à un difféomorphisme près au but, une unique immersion : l'injection canonique de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

Proposition 6 — Forme réduite d'une immersion. Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in \mathrm{U}$ et une application $f = (f_1, \ldots, f_p) : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que f est une immersion en a. Il existe un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme φ^{-1} d'un voisinage ouvert de $f(a)$ dans un ouvert de $\mathbb{R}^p$ tel que $\varphi^{-1} \circ f$ soit l'application

$$g : (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)\,.$$

Preuve. Le **théorème du rang** et l'injectivité de $\mathrm{d}f(a)$ assurent l'inégalité $p \geqslant n$.

Par ailleurs, on note $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et, pour $i \in [\![1\,,\, n]\!]$, on pose

$$v_i = \mathrm{d}f(a)(\varepsilon_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in \mathbb{R}^p$$

l'image du i^{e} vecteur de la base canonique par l'application $\mathrm{d}f(a)$. Or, l'injectivité de $\mathrm{d}f(a)$ est équivalente à la liberté de la famille $(v_1, \ldots, v_n)$. On peut donc, grâce au **théorème de la base incomplète**, considérer des vecteurs $(v_{n+1}, \ldots, v_p)$ tels que $(v_1, \ldots, v_p)$ soit une base de $\mathbb{R}^p$.

On définit alors φ par

$$\forall\, x = ((x_1, \ldots, x_n), (x_{n+1}, \ldots, x_p)) \in \mathrm{U} \times \mathbb{R}^{p-n}, \qquad \varphi(x_1, \ldots, x_p) = f(x_1, \ldots, x_n) + x_{n+1}v_{n+1} + \cdots + x_p v_p$$

et on pose $a' = (a, 0, \ldots, 0)$. L'application φ est de classe $\mathscr{C}^1$ (les p dérivées partielles existent et sont continues) et on a

$$\mathrm{d}\varphi(a') = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(a'), \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_p}(a')\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a), v_{n+1}, \ldots, v_p\right) = (v_1, \ldots, v_p).$$

L'application linéaire $\mathrm{d}\varphi(a')$ est donc bijective. Le **théorème d'inversion locale** assure alors que φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme d'un voisinage ouvert de a' dans $\mathbb{R}^p$ dans un voisinage ouvert de $\varphi(a') = f(a)$. De plus, on a bien sûr $f = \varphi \circ g$. ∎

Remarque 7 — Autres démonstrations. La démonstration proposée ci-dessus met en avant le rôle du théorème de la base incomplète appliqué dans l'espace $\mathbb{R}^n$. Comme pour le cas de la submersion, il peut être intéressant de chercher dans les autres preuves (par exemple dans l'exercice 73 de [3]) où est caché le théorème de la base incomplète. Dans l'exercice 73 de [3], il est appliqué dans sa version forte : celle avec la famille libre $\mathscr{L}$ et la famille génératrice $\mathscr{G}$ contenant $\mathscr{L}$. ∎

Remarques.

Remarque 8 — Régularité. Soit $r \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Les démonstrations proposées ici montrent immédiatement que si f est de classe $\mathscr{C}^r$ alors φ est de classe $\mathscr{C}^r$. ∎

Remarque 9 — Lien avec le théorème du rang constant. La **caractérisation du rang par les mineurs extraits** (voir [1, 4.1.5] et [2, 11.1.2.3]) montre que $\mathrm{d}f(x)$ reste surjective (resp. injective) pour tout x dans un voisinage de a si f est une submersion (resp. une immersion) en a. En particulier, $\mathrm{d}f(x)$ est de rang constant égal à $\inf(n, p)$ dans un voisinage de a. Le théorème du rang constant (voir l'exercice 74 de [3]) s'applique donc et il fournit un difféomorphisme φ en a et un difféomorphisme ψ en $f(a)$ tel que

$$\psi \circ f \circ \varphi : (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (x_1, \ldots, x_p)$$

respectivement

$$\psi \circ f \circ \varphi : (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)\,.$$

On obtient donc un résultat un peu plus faible puisqu'on fait appel à deux difféomorphismes un à la source et un au but. C'est tout à fait normal : le théorème du rang constant à des hypothèses plus faibles que celui de forme réduite des immersions et des submersions et fournit donc un résultat plus faible. ∎

Références

[1] V. Beck, J. Malick et G. Peyré, *Objectif Agrégation*, Deuxième édition (2005), H&K.

[2] E. Ramis, C. Deschamps et J. Odoux, *Cours de Mathématiques tome 1, Algèbre*, Réédition (1998), Dunod.

[3] F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, Deuxième édition (2003), Cassini.