Exercice 3.4 – Séries de Fourier et convolution. Soit $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T})$. Que peut-on dire de la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)^2 e_k(x)$?

Commentaires. Cet exercice mélange les notions de séries de Fourier et de convolution. L'argument clé est le théorème 3.71 qui lie ces deux notions.

Corrigé. Dans l'espace de Hilbert $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$ (dont on note $\|\cdot\|$ la norme), on applique l'égalité de Parseval (voir la sous-section 3.3.1) à un élément $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T})$:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2 = \|f\|^2 < +\infty.$$

La série de fonctions $\sum c_k(f)^2 e_k$ converge donc normalement sur $\mathbb{R}$. La remarque 3.79 montre alors que la somme g de cette série définit un élément de $\mathscr{C}(\mathbb{T})$ dont les coefficients de Fourier vérifient $c_k(g) = c_k(f)^2$.

Le théorème 3.56 (adapté au tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$) montre que la fonction $f*f$, convolée de deux fonctions de $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$, est donc une fonction continue sur $\mathbb{T}$. Par ailleurs, le théorème de convolution 3.71 affirme que $c_k(f*f) = c_k(f)^2$. On obtient donc $c_k(g) = c_k(f*f)$. L'injectivité de $\mathcal{F}$ (voir le théorème 3.71) assure alors que $g = f*f$ pour presque tout $x \in \mathbb{T}$. Comme ces deux fonctions sont continues, on en déduit que $f*f = g$. La série

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)^2 e_k(x)$$

converge donc normalement sur $\mathbb{R}$ vers $f*f(x)$.

Exercice 3.5 – Convergence simple d'une série de Fourier. Soit f un élément de $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$. On suppose que, pour presque tout t dans $\mathbb{R}$,

$$\mathrm{S}_\mathrm{N}(f)(t) \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 0.$$

Montrer que les coefficients de Fourier $c_n(f)$ sont nuls.

Commentaires. Cet exercice utilise les moyennes de Cesàro pour exploiter l'hypothèse sur les sommes partielles $\mathrm{S}_\mathrm{N}(f)$.

Corrigé. La suite $(\mathrm{S}_\mathrm{N}(f)(t))_\mathrm{N}$ converge (au sens classique) vers 0, donc elle converge aussi au sens de Cesàro vers 0. Ainsi, la suite $(\sigma_\mathrm{N}(f)(t))_\mathrm{N}$ qui est la suite des moyennes de Cesàro de $(\mathrm{S}_\mathrm{N}(f)(t))_\mathrm{N}$ converge aussi vers 0 pour presque tout $t \in \mathbb{R}$.

Par ailleurs, d'après le théorème de Fejér 3.75, $\sigma_\mathrm{N}(f)$ tend vers f dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$. De plus, un résultat de la théorie de la mesure (voir le théorème 3.12 de [RUD]) affirme que l'on peut extraire de $\sigma_\mathrm{N}(f)$ une sous-suite qui converge presque partout vers f.

On en déduit que la fonction f est nulle presque partout et que ses coefficients de Fourier $c_n(f)$ sont tous nuls.

Exercice 3.6 – Théorème ergodique de Von Neumann. Soient $(\mathrm{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert, T un endomorphisme de H continu, de norme $\|\mathrm{T}\| \leqslant 1$. Notons T_n la moyenne des premiers itérés successifs de T :

$$\mathrm{T}_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{T}^k.$$

L'objectif de cet exercice est de montrer que :

$$\forall\, x \in \mathrm{H}, \qquad \mathrm{T}_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} p(x),$$

où p est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{I}-\mathrm{T})$.

a) Montrer les équivalences, pour $x \in \mathrm{H}$,

$$\mathrm{T}x = x \iff \langle \mathrm{T}x, x\rangle = \|x\|^2 \iff \langle x, \mathrm{T}x\rangle = \|x\|^2.$$

b) Montrer que $\operatorname{Ker}(\mathrm{I}-\mathrm{T}) = \operatorname{Ker}(\mathrm{I}-\mathrm{T})^*$. En déduire que

$$\forall\, x \in \operatorname{Ker}(\mathrm{I}-\mathrm{T})^*, \qquad \mathrm{T}_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} p(x) = x.$$

c) Pour $x \in \operatorname{Im}(\mathrm{I}-\mathrm{T})$, montrer que $\mathrm{T}_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

d) En déduire que $\mathrm{T}_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ lorsque $x \in \overline{\operatorname{Im}(\mathrm{I}-\mathrm{T})}$.

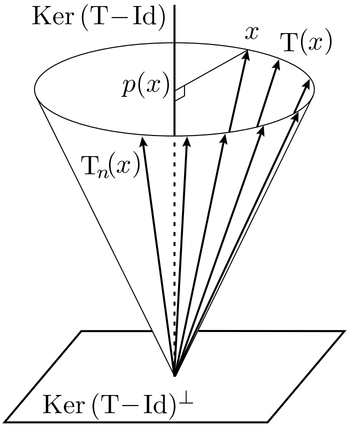
e) Démontrer le résultat annoncé.

f) Soit $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2(\mathbb{T})$ muni de son produit scalaire canonique (voir la section 3.3). Posons $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Q}$, montrer que, pour tout $f \in \mathrm{H}$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\,\cdot + k\alpha) \xrightarrow{\mathrm{H}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Commentaires. Nous proposons ici une preuve qui utilise une décomposition de H en somme directe orthogonale. On en trouve une autre démonstration utilisant des arguments d'optimisation dans [WIL, 4.47]. Si $\mathrm{H} = \mathbb{R}^3$ et T est une rotation d'angle irrationnel, alors on peut visualiser le théorème (dessin ci-contre).

Attention, ce théorème ergodique de Von Neumann établit la convergence de la suite $(\mathrm{T}_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ vers $p(x)$ pour tout $x \in \mathrm{H}$, mais ceci n'entraîne pas la convergence de la suite d'opérateurs $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers p. En effet, la convergence établie est une convergence simple, alors que la convergence de T_n vers p dans l'espace des endomorphismes continu de H serait une convergence uniforme sur la sphère unité (d'après la définition de la norme d'une application linéaire continue).



Corrigé.

a) Comme $\langle x, \mathrm{T}(x)\rangle = \overline{\langle \mathrm{T}(x), x\rangle}$, on a l'équivalence

$$\langle \mathrm{T}(x), x\rangle = \|x\|^2 \iff \langle x, \mathrm{T}(x)\rangle = \|x\|^2.$$

Par ailleurs, si $\mathrm{T}(x) = x$, alors $\langle \mathrm{T}(x), x\rangle = \|x\|^2$. Il reste à montrer que si $\langle \mathrm{T}(x), x\rangle = \|x\|^2$ alors $\mathrm{T}x = x$. On utilise pour cela le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir la sous-section 3.1.1). Pour $x = 0$, on a $\mathrm{T}(x) = x = 0$; supposons à présent que $x \neq 0$. Comme $\|\mathrm{T}\| \leqslant 1$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\langle \mathrm{T}(x), x\rangle \leqslant \|\mathrm{T}(x)\|\,\|x\| \leqslant \|x\|^2.$$

L'hypothèse assure que le membre de droite et celui de gauche sont égaux. Ainsi, on a égalité dans l'inégalité dans Cauchy-Schwarz et donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $\mathrm{T}(x) = \lambda x$. Par suite $\langle \lambda x, x\rangle = \langle \mathrm{T}(x), x\rangle$ et donc $\lambda\|x\|^2 = \|x\|^2$. Comme $x \neq 0$, on en déduit que $\lambda = 1$. Finalement, on a bien $\mathrm{T}(x) = x$.

b) Comme $\|T\| = \|T^*\| \leqslant 1$, on peut appliquer le résultat de la question **a** à T puis à T^* pour obtenir

$$T(x) = x \iff \langle x, T(x)\rangle = \|x\|^2 \qquad \text{et} \qquad T^*(x) = x \iff \langle T^*(x), x\rangle = \|x\|^2.$$

Par définition de l'adjoint, on a $\langle T^*x, x\rangle = \langle x, Tx\rangle$, ce qui implique

$$x \in \operatorname{Ker}(I - T)^* \iff x \in \operatorname{Ker}(I - T).$$

On obtient donc $\operatorname{Ker}(I - T)^* = \operatorname{Ker}(I - T)$. On en déduit que $T^k(x) = x$ pour tout $x \in \operatorname{Ker}(I - T)^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi, $T_n(x) = x = p(x)$ pour tout n, ce qui donne le résultat souhaité.

c) Soit $x \in \operatorname{Im}(I - T)$; il existe $y \in H$ tel que $(I - T)(y) = x$. On a alors

$$T_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(T^k(y) - T^{k+1}(y)) = \frac{1}{n+1}\,(y - T^{n+1}(y)).$$

Ceci implique $$\|T_n(x)\| \leqslant \frac{1}{n+1}(\|y\| + \|T^{n+1}(y)\|),$$

et, puisque $\|T\| \leqslant 1$, $$\|T_n(x)\| \leqslant \frac{2}{n+1}\,\|y\|.$$

On en déduit que $T_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

d) Soit $\varepsilon > 0$. Considérons $x \in \overline{\operatorname{Im}(I - T)}$ et $y \in \operatorname{Im}(I - T)$ tel que $\|x - y\| \leqslant \varepsilon$. On écrit alors

$$\|T_n(x)\| \leqslant \|T_n(x) - T_n(y)\| + \|T_n(y)\|.$$

Comme $\|T\| \leqslant 1$, on a $\|T_n\| \leqslant 1$. Ainsi

$$\|T_n(x)\| \leqslant \|T_n\|\,\|x - y\| + \|T_n(y)\| \leqslant \varepsilon + \|T_n(y)\|. \tag{$*$}$$

Comme $y \in \operatorname{Im}(I - T)$, la question **c** assure que $T_n(y) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. On passe à la limite supérieure dans $(*)$ pour obtenir

$$\limsup_{n\to+\infty}\ \|T_n(x)\| \leqslant \varepsilon.$$

On peut conclure $T_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

e) D'après l'application 3.32 et la question **b**, l'espace H se décompose en

$$H = \operatorname{Ker}(I - T)^* \overset{\perp}{\oplus} \overline{\operatorname{Im}(I - T)} = \operatorname{Ker}(I - T) \overset{\perp}{\oplus} \overline{\operatorname{Im}(I - T)}.$$

Tout élément z de H se décompose donc de façon unique en $z = x + y$ avec $x \in \operatorname{Ker}(I - T)$ et $y \in \overline{\operatorname{Im}(I - T)}$. Comme $T_n(z) = T_n(x) + T_n(y)$, les questions **b** et **d** montrent que $T_n(z) \xrightarrow[n\to\infty]{} x = p(z)$.

f) Considérons l'endomorphisme de $H = L^2(\mathbb{T})$

$$T\colon \begin{cases} H \longrightarrow H \\ f \longmapsto \big(x \mapsto f(x + \alpha)\big). \end{cases}$$

L'endomorphisme T est continu de norme 1. En fait, c'est même une isométrie :

$$\forall f \in H, \qquad \|T(f)\| = \|f\|.$$

On peut donc utiliser le théorème ergodique de Von Neumann (question **e**). Pour cela on cherche alors le noyau de $\mathrm{I}-\mathrm{T}$. Montrons que $\operatorname{Ker}(\mathrm{I}-\mathrm{T})$ est exactement l'ensemble des fonctions constantes de H.

Notons $g = \mathrm{T}(f) = f(\cdot+\alpha)$. Grâce à un changement de variables, on vérifie que,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad c_n(g) = e^{-in\alpha} c_n(f).$$

Par ailleurs, si $f \in \operatorname{Ker}(\mathrm{I}-\mathrm{T})$, on a $g = f$ (dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$) et donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad c_n(g) = c_n(f).$$

Comme $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Q}$, on a $e^{-in\alpha} \neq 1$ pour $n \neq 0$. Finalement, on a l'équivalence

$$f \in \operatorname{Ker}(\mathrm{I}-\mathrm{T}) \iff \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad c_n(f) = 0.$$

Par ailleurs, le théorème 3.71 assure que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad c_n(f) = 0 \iff f \text{ est constante.}$$

Le théorème de Von Neumann affirme donc que

$$x \longmapsto \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x+k\alpha)$$

converge dans H vers la projection de f sur l'espace des fonctions constantes c'est-à-dire vers

$$\langle \mathbf{1}, f\rangle \mathbf{1} = c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 3.7 — Densité des polynômes orthogonaux. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. On suppose qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\int_{\mathrm{I}} \mathrm{e}^{\alpha|x|}\,\rho(x)\,\mathrm{d}x < +\infty. \qquad (*)$$

Il s'agit de montrer que les polynômes orthogonaux associés à ρ forment une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(\mathrm{I},\rho)$.

a) Dans cette question, ρ est une fonction de poids quelconque. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^n \in \mathrm{L}^1(\mathrm{I},\rho)$. Montrer que pour tout $p \in [\,1\,,+\infty\,[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^n \in \mathrm{L}^p(\mathrm{I},\rho)$.

b) Dans la suite on suppose que ρ vérifie $(*)$ et l'on considère une fonction $f \in \mathrm{L}^2(\mathrm{I},\rho)$. Montrer que la fonction φ définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = \begin{cases} f(x)\rho(x) & \text{si } x \in \mathrm{I},\\ 0 & \text{sinon,}\end{cases}$$

est une fonction de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

On peut donc considérer sa transformée de Fourier c'est-à-dire pour $\omega \in \mathbb{R}$

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \int_{\mathrm{I}} f(x) e^{-i\omega x}\rho(x)\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que $\widehat{\varphi}$ se prolonge en une fonction F holomorphe sur

$$\mathrm{B}_a = \{z \in \mathbb{C}, \quad |\mathscr{I}m\, z| < a/2\}.$$