« Sur $\mathbb{C}$, tout est connexe ! »

www.h-k.fr/publications/objectif-agregation

L'idée de cette note est de montrer que, contrairement à ce qui se passe sur $\mathbb{R}$, « sur $\mathbb{C}$, tout est connexe ». Cet abus de langage se justifie grâce au lemme 1 qui permet de montrer la connexité de nombreux ensembles classiques dans le cas complexe, notamment d'ensembles de matrices (voir les exemples ci-dessous qui peuvent se replacer dans les leçons « Polynômes à plusieurs variables » ou « Espace connexe » ou encore « Densité »...).

Complémentaire des zéros de polynômes.

Lemme 1 — Complémentaire des zéros d'un polynôme. Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et P une fonction polynomiale non nulle sur V. L'ensemble $\mathrm{V} \setminus \{\mathrm{P}^{-1}(0)\}$ est un ouvert dense de V et il est aussi connexe par arc.

Preuve.

- Comme P est continue, $\mathrm{V} \setminus \{\mathrm{P}^{-1}(0)\}$ est ouvert.
- Pour montrer la densité de $\mathrm{V} \setminus \{\mathrm{P}^{-1}(0)\}$, on va montrer que $\mathrm{P}^{-1}(0)$ est d'intérieur vide. On raisonne par l'absurde et on suppose que $\mathrm{P}^{-1}(0)$ contient un ouvert D non vide. En considérant une base $(e_1, \dots, e_n)$ de V, on identifie V à $\mathbb{C}^n$ et P à un élément non nul de $\mathbb{C}[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n]$. Par ailleurs, il existe des ouverts non vides $\mathrm{D}_i \subset \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{D}_1 \times \cdots \times \mathrm{D}_n \subset \mathrm{D}$. Or un polynôme Q en n indéterminées qui s'annule sur un ensemble de la forme $\mathrm{A}_1 \times \cdots \times \mathrm{A}_n$ avec $\mathrm{Card}\, \mathrm{A}_i > \deg_{\mathrm{X}_i} \mathrm{Q}$ est le polynôme nul (voir le lemme 10). Comme les D_i sont infinis et que P s'annule sur $\mathrm{D}_1 \times \cdots \times \mathrm{D}_n$, on en déduit que $\mathrm{P} = 0$ et on aboutit ainsi à une contradiction.
- Passons à la connexité par arcs. La démonstration consiste essentiellement à revenir à la dimension 1 : une fonction polynomiale en une seule variable (complexe) n'a qu'un nombre fini de zéros et l'ensemble $\mathbb{C}$ privé d'un nombre fini de points est connexe par arc.

  Soient $a, b \in \mathrm{V} \setminus \{\mathrm{P}^{-1}(0)\}$. L'application
  $$\mathrm{Q} \colon \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \in \mathbb{C} \longmapsto \mathrm{P}(za + (1-z)b) \end{cases}$$
  est une application polynomiale. Elle admet donc un nombre fini de racines $\{z_1, \dots, z_n\}$ satisfaisant $z_i \notin \{0, 1\}$. La connexité par arc de $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ assure l'existence d'un chemin $\gamma : [\,0\,,1\,] \mapsto \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ tel que $\gamma(0) = 0$ et $\gamma(1) = 1$. Le chemin $\Gamma : [\,0\,,1\,] \mapsto \mathrm{V}$ donné par $\Gamma(t) = \gamma(t)a + (1-\gamma(t))b$ vérifie alors $\mathrm{P}(\Gamma(t)) = \mathrm{Q}(\gamma(t)) \neq 0$. Ainsi Γ est un chemin de b à a dans $\mathrm{V} \setminus \{\mathrm{P}^{-1}(0)\}$. Le complémentaire des zéros de P est donc connexe par arcs. ∎

Remarque 2 — $\mathbb{C}$ VS $\mathbb{R}$. Le lemme 1 s'étend avec la même démonstration pour la partie densité et ouverture au cas du corps des réels. De façon précise, on dispose du résultat suivant : soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et P une fonction polynomiale non nulle sur V ; l'ensemble $\mathrm{V} \setminus \{\mathrm{P}^{-1}(0)\}$ est un ouvert et dense de V.

Cependant la connexité par arcs (ni même la connexité, voir la remarque 8) n'est pas conservée dans le cas réel (comme dans les exemples 4 et 3). ∎

Exemple 3 — « Cercle ». Appliquons le lemme 1 avec $\mathrm{V} = \mathbb{C}^2$ et $\mathrm{P}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 - 1$. On obtient que le sous-ensemble de $\mathbb{C}^2$ donné par $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2, \quad x^2 + y^2 - 1 \neq 0\}$ est connexe (par arc). Remarquez qu'au contraire le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ donné par $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 - 1 \neq 0\}$ n'est pas connexe. ∎

Exemple 4 — Complémentaire d'hyperplans. Soient V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathrm{H}_1, \dots, \mathrm{H}_m$ un nombre fini d'hyperplans (éventuellement affines). Alors l'ensemble $\mathrm{V} \setminus (\mathrm{H}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{H}_m)$ est un ouvert connexe par arc et dense.

En effet, pour $i \in [\![\, 1\,,\, m \,]\!]$, il existe une forme affine f_i telle que ${f_i}^{-1}(0) = \mathrm{H}_i$. Le produit des f_i est alors une fonction polynomiale sur V dont les zéros sont les éléments de $\mathrm{H}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{H}_m$. Le lemme 1 montre que $\mathrm{V} \setminus \{\mathrm{H}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{H}_m\}$ est connexe.

Encore une fois la situation dans le cas complexe est donc très différente de celle du cas réel : dans le cas réel un seul hyperplan suffit pour perdre la connexité en séparant l'espace en deux demi-espaces. Notez donc que « être du même coté d'un hyperplan » n'a aucun sens dans $\mathbb{C}$. ∎

Application 5 — GL(V). Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. L'ensemble GL(V) des isomorphismes linéaires de V est un ouvert connexe par arcs et dense puisque c'est le complémentaire des zéros de la fonction polynomiale déterminant.

Les conséquences de la connexité de $\mathrm{GL}(\mathrm{V})$ sont nombreuses. Donnons deux exemples.

- Les classes de conjugaison dans $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathrm{V})$ sont connexes puisque ce sont des orbites sous l'action du groupe connexe $\mathrm{GL}(\mathrm{V})$.
- Soit W un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie ; l'ensemble des applications linéaires de rang ℓ de V dans W est connexe, puisque c'est une orbite sous l'action du groupe connexe $\mathrm{GL}(\mathrm{V}) \times \mathrm{GL}(\mathrm{W})$. ■

Extensions et applications.

Corollaire 6 — Connexe et dense. Soient V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathrm{W} \subset \mathrm{V}$ un sous-ensemble contenant un ensemble de la forme $\mathrm{V} \smallsetminus \{\mathrm{P}^{-1}(0)\}$ où P est une fonction polynomiale non nulle sur V. L'ensemble W est connexe et dense de V.

Preuve. D'après le lemme 1, on a

$$\mathrm{V} \smallsetminus \{\mathrm{P}^{-1}(0)\} \subset \mathrm{W} \subset \mathrm{V} = \overline{\mathrm{V} \smallsetminus \{\mathrm{P}^{-1}(0)\}} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V} \smallsetminus \{\mathrm{P}^{-1}(0)\} \ \text{connexe.}$$

On en déduit tout de suite la densité de W. La connexité de W résulte du fait que W est compris entre un ensemble connexe et son adhérence (voir [CCM, V.2.1.a]). ■

Application 7 — Complémentaire de sous-espaces. Soient V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_m$ un nombre fini de sous-espaces vectoriels distincts de V. L'ensemble $\mathrm{V} \smallsetminus (\mathrm{F}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{F}_m)$ est ouvert connexe par arc et dense.

En effet, il est évidemment ouvert. De plus, en considérant pour $i \in [\![1\,, m]\!]$ un hyperplan H_i contenant F_i, on obtient la connexité et la densité grâce à l'exemple 4 et au corollaire 6. Enfin, dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), un ouvert connexe est connexe par arcs (voir la remarque 8) ce qui donne le résultat souhaité.

Soit u un endomorphisme de V ; l'ensemble des vecteurs v de V tel que le sous-espace cyclique $\langle v \rangle_u$ soit de dimension égale au degré du polynôme caractéristique est donc connexe puisque c'est le complémentaire de la réunion des sous-espaces $\mathrm{Ker}\,\mathrm{P}(u)$ pour P diviseur unitaire du polynôme minimal π_u de u. On obtient ainsi une nouvelle différence entre ce qui se passe sur $\mathbb{R}$ et ce qui se passe sur $\mathbb{C}$. ■

Remarque 8 — Connexité, connexité par arcs. Le résultat « ouvert + connexe $\Longrightarrow$ connexe par arcs » est en fait vrai dans un espace topologique localement connexe par arcs, c'est-à-dire tel que tout point admet une base de voisinages connexes par arcs. Il est aisé de généraliser la démonstration de [GOU2, I.4.3. Théorème 5] sous ces hypothèses. C'est bien entendu le cas, en particulier, pour les espaces vectoriels normés puisque les boules centrées en x forment une base de voisinages convexes et donc connexes par arcs.

Application 9 — Endomorphismes diagonalisables. Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. L'ensemble Reg des endomorphismes de V ayant $\dim \mathrm{V}$ valeurs propres distinctes est un ouvert connexe par arcs et dense puisque c'est le complémentaire des zéros de la fonction polynomiale discriminant du polynôme caractéristique.

On en déduit, grâce au corollaire 6, la densité et la connexité des endomorphismes diagonalisables puisque les éléments de Reg sont diagonalisables.

Cette démonstration de la connexité des endomorphismes diagonalisables est en fait assez artificielle puisque les endomorphismes diagonalisables forment un cône de sommet 0 et est donc connexe par arc. Le même argument géométrique montre que l'ensemble des endomorphismes diagonalisables d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie est connexe par arc. ■

Propriété-clés des polynômes et fonctions polynomiales.

Revenons sur les résultats utilisés dans le lemme 1. Soient k un corps (commutatif) et $\mathrm{P} \in k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ un polynôme en n indéterminées. Le polynôme P définit une application sur k^n à valeurs dans k dite *fonction polynomiale associée à* P. Cette application, parfois notée $\widetilde{\mathrm{P}}$, est donnée par

$$\widetilde{\mathrm{P}} : \begin{cases} k^n & \longrightarrow k \\ (z_1, \ldots, z_n) & \longmapsto \mathrm{P}(z_1, \ldots, z_n)\,. \end{cases}$$

On construit ainsi un morphisme unitaire $\varphi : \mathrm{P} \mapsto \widetilde{\mathrm{P}}$ de k-algèbres de $k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ dans l'ensemble $\mathscr{F}(k^n, k)$ des fonctions de k^n dans k. On se pose alors la question de l'injectivité de cette application et plus généralement de savoir sous quelles conditions une application polynomiale qui s'annule sur un sous-ensemble de k^n s'annule sur tout k^n et si le polynôme en question est nul.

Le résultat important utilisé dans la preuve du lemme 1 est le suivant

Lemme 10 — Annulation des fonctions polynomiales. Soient k un corps et $\mathrm{Q} \in k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ un polynôme à n indéterminées. On suppose que Q s'annule sur un ensemble de la forme $\mathrm{A}_1 \times \cdots \times \mathrm{A}_n$ avec Card $\mathrm{A}_j > \deg_{\mathrm{X}_j} \mathrm{Q}$ pour tout $j \in [\![1\,,\, n]\!]$ alors Q est le polynôme nul et donc s'annule partout.

Preuve. Pour $n = 1$, c'est un résultat classique. Le cas général se démontre par récurrence sur n en se ramenant à la dimension 1. En factorisant dans chacun des monômes de P la plus grande puissance de X_n, on peut écrire

$$\mathrm{P} = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{P}_i {\mathrm{X}_n}^i \qquad \text{avec} \quad \mathrm{P}_i \in k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_{n-1}]\,.$$

Pour tout $(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathrm{A}_1 \times \cdots \mathrm{A}_{n-1}$, le polynôme

$$\mathrm{Q}(\mathrm{X}_n) = \mathrm{P}(a_1, \ldots, a_{n-1}, \mathrm{X}_n) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{P}_i(a_1, \ldots, a_{n-1}) {\mathrm{X}_n}^i \in k[\mathrm{X}_n]$$

s'annule sur l'ensemble A_n avec $\deg_{\mathrm{X}_n} \mathrm{Q}_n \leqslant \deg_{\mathrm{X}_n} \mathrm{P} < |\mathrm{A}_n|$. Ainsi $\mathrm{Q}(\mathrm{X}_n) = 0$ c'est-à-dire $\mathrm{P}_i(a_1, \ldots, a_{n-1}) = 0$ pour tout $i \in [\![1\,,\, m]\!]$ et tout $(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathrm{A}_1 \times \cdots \times \mathrm{A}_{n-1}$. Comme $\deg_{\mathrm{X}_j} \mathrm{P}_i \leqslant \deg_{\mathrm{X}_j} \mathrm{P} < |\mathrm{A}_j|$ pour tout $j \in [\![1\,,\, n-1]\!]$, l'hypothèse de récurrence appliquée aux P_i montre qu'ils sont nuls eux aussi. Ainsi on conclut que P est nul, ce qui achève la preuve par récurrence. ■

Terminons par quelques commentaires autour de ce résultat.

- Ce résultat a pour conséquence immédiate de montrer que l'application $\varphi : \mathrm{P} \mapsto \widetilde{\mathrm{P}}$ est injective si k est infini : si $\widetilde{\mathrm{P}} = 0$ alors P s'annule sur $k^n = k \times \cdots \times k$ avec k infini.
- Dans le cas d'un corps fini, l'application φ n'est plus injective (pensez au polynôme $\mathrm{X}^q - \mathrm{X}$ sur $\mathbb{F}_q$). Par contre, elle est surjective.
- Attention, contrairement au cas d'une variable, un polynôme en plusieurs variables peut s'annuler sur un ensemble infini sans pour autant être nul (pensez à $\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 - 1 \in \mathbb{R}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$). La forme de l'ensemble sur lequel un polynôme s'annule est donc fondamentale pour savoir si le polynôme est nul ou pas : ce doit être un produit d'ensemble. ■

Références

[CCM] G. Christol, A. Cot, et C.-M. Marle. *Topologie.* Ellipses, 1997.

[GOU2] X. Gourdon. *Les Maths en tête, Analyse.* Ellipses, 1996.